ÜBER DIE FUNKTIONAL-DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$c_0 \cdot f(x) + c_1 \cdot f'(x) + \cdots + c_n \cdot f^{(n)}(x) = f(x-1).$$

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
BEI DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT LEIPZIG EINGEREICHT

VON

FRITZ SCHÜRER.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1915.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Hölder und Herglotz.

Leipzig, den 8. Juli 1914.

Der Procancellar
Kirchner.

Diese Dissertation erscheint außerdem in den Berichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1914, Band LXVI, Sitzung vom 26. Oktober, Seite 137—159.
Nach dieser Parallelpublikation ist die vorliegende Dissertation paginiert.

Lebenslauf.

Am 8. Oktober 1885 wurde ich, der Verfasser dieser Dissertation, in Ölsnitz i. V. geboren. Ich bin evangelisch-lutherischer Konfession. Ostern 1896 wurde ich in das Königliche Gymnasium zu Dresden-N. aufgenommen, das ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Von Sommersemester 1905 bis mit Sommersemester 1909 studierte ich auf der Universität Leipzig Mathematik und Physik. Die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen bestand ich am 18. Januar 1910 mit den Lehrbefähigungen: Reine Mathematik und Physik, beide für Oberstufe, und angewandte Mathematik. Von Ostern 1910 bis Ostern 1911 legte ich im höheren Schuldienst des Königreich Sachsen mein Probejahr ab. Von Ostern 1911 bis Ostern 1912 verwaltete ich eine Oberlehrerstelle an einem privaten Lyzeum in Berlin. Seit Ostern 1912 unterrichte ich an der städtischen höheren Knabenschule zu Pillkallen i. Ostpr., an der ich seit 1. Oktober 1913 endgültig angestellt bin.

Bisher habe ich außer dieser Dissertation veröffentlicht:

1. Über die n-Ecke, denen unendlich viel regelmäßige n-Ecke einbeschrieben werden können. Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht. XLI.
2. Über die Nullstellen linearer Aggregate von Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung XXI. 1912. Heft 2/3.
3. Über die Funktionaldifferentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$. Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. LXIV. 21. Okt. 1912.
4. Über eine lineare Funktionaldifferentialgleichung. Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. LXV. 16. Juli 1913.
5. Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Funktionaldifferentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$“. Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. LXV. 27. Okt. 1913.
6. Über Analogien zwischen den Lösungen der Gleichung $f'(x+1) = af(x)$ und den ganzen Funktionen komplexer Veränderlicher. Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. LXV. 27. Oktober 1913.

7. Eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen der linearen Aggregate eines Funktionensystems. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung XXIII. 1914, Heft 1/2.

Auf der Universität Leipzig habe ich Vorlesungen gehört bzw. Übungen besucht bei den Herren Profs. Drs. Des Coudres, M. Heinze, O. Hölder, Jungmann, Lehmann, Liebmann, A. Mayer, C. Neumann, Rohn, Volkelt, Wagner, Wiener, Wundt.

Meinen Lehrern auf Schule und Universität sage ich in Ehrerbietung meinen Dank, insbesondere Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Hölder für seine diese Dissertation und meine übrigen wissenschaftlichen Arbeiten betreffenden Bemühungen.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. *Einleitung*	137—141
II. *Sätze über die Anzahl der Nullstellen und der Zeichenwechselstellen in Intervallen von der Länge* 1	141—148
1. Zeichenerklärungen	141—142
2. Hilfssätze	142—145
3. Über die Zahl der Nullstellen und der Zeichenwechselstellen von Lösungen in Intervallen von der Länge 1	145—148
III. *Über die Lösungen, für die* $\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x} = 0$ *ist* . .	148—159
1. Ein Hilfssatz	148—149
2. Eine Folge der Bedingung $\lvert\varphi(x)\rvert < Ce^{\alpha x}$	149—154
3. Eine obere Grenze für die Anzahl der Lösungen, für die $\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x} = 0$ ist	154—157
4. Eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen der Lösungen, für die $\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x} = 0$ ist, in Intervallen von der Länge 1	157—159

I. Einleitung.

Die Lösung einer Funktionalgleichung oder einer funktionalen Differentialgleichung läßt sich in ihrer allgemeinen Form oft leicht angeben. So z. B. für die Gleichung $f(x) = af'(x + 1)$ mit Hülfe einer für $0 < x \leqq 1$ willkürlich definierten Anfangsfunktion. Ähnliches findet bei partiellen Differentialgleichungen statt. So bereitet die Angabe der *allgemeinen* Lösung der Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ keine Schwierigkeiten. Erst durch Einführung gewisser *Nebenbe-*

dingungen (Randwerte) gewinnt diese Gleichung an Interesse. Bis vor einigen Jahren hat man für Funktionalgleichungen nur eine Nebenbedingung gekannt: Die Lösung solle eine analytische Funktion sein (Beispiel: die Gleichung $f(x + \omega_1 + i\omega_2) = f(x)$). Als aber das Studium der Funktionen einer reellen Variabelen mehr in den Vordergrund trat, hat man auch nach Bedingungen gesucht, die über die Werte der Lösung für reelle x etwas aussagen. Oft genügt schon die Forderung, die Lösung solle für einen Bereich der x stetig differentiierbar sein, um eine interessante Klasse von Lösungen abzusondern, so z. B. bei der Gleichung $f(x) = af'(x + 1)$, wo die Bedingung lautet, $f(x)$ solle für alle reellen endlichen x einmal stetig differentiierbar sein. Weitere Einschränkungen sagen über das Verhalten der Lösungen im Unendlichen etwas aus. So hat E. SCHMIDT[1]) bewiesen, daß die Gleichung

$$\sum_0^n \sum_0^m a_{\mu\nu} f^{(\nu)}(x + h_{\mu\nu}) = 0$$

nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger für alle reellen endlichen x m-mal stetig differentiierbarer Lösungen haben kann, die mit samt ihren $m - 1$ ersten Ableitungen nicht stärker als alle Potenzen von $|x|$ für $|x| \to \infty$ unendlich werden, und hat auch diese Lösungen angegeben.

Die Arbeit von E. SCHMIDT ist, soweit ich habe in Erfahrung bringen können, die erste, die eine für derartige Gleichungen spezifische Methode angibt, deren Grundgedanke die Verwendung einer gewissen Identität ist.[2])

Nun entsteht die Frage, wie weit man in der E. SCHMIDTschen Gleichung das Unendlich von $f(x)$ erhöhen kann, ohne mehr Lösungen zu erhalten.

Für einen Spezialfall der E. SCHMIDTschen Gleichung, nämlich für die Gleichung

$$f(x) = af'(x + 1)$$

---

1) Mathem. Annalen, Bd. 70, 1911, S. 499ff., insbesondere auch S. 500—503.

2) a. a. O. S. 514. Die daselbst zitierte Arbeit von Frl. O. POLOSUCHIN enthält im wesentlichen eine, übrigens sehr naheliegende, Anwendung der FREDHOLM-HILBERTschen Integralgleichungslehre auf Funktionaldifferentialgleichungen.

habe ich diese Aufgabe verallgemeinert und gelöst.[1]) Ebenda habe ich auch alle die Lösungen angegeben, für die in beliebiger Nähe von $-\infty$ Intervalle von der Länge 1 existieren, in denen die Anzahl der Zeichenwechselpunkte der Lösung unter ein und derselben gegebenen endlichen Grenze liegt.[2]) Die angewandte Methode gründet sich darauf, daß eine der erwähnten E. Schmidtschen verwandte Identität[3]) zu den Koeffizienten einer von Herglotz gegebenen Entwicklung[4]) in Beziehung steht, und außerdem auf gewisse Sätze über die Anzahl der Nullstellen linearer Aggregate der Lösungen von der Form $e^{\alpha x}\sin\beta x$ und $e^{\alpha x}\cos\beta x$ in Intervallen von der Länge 1.[5])

Herglotz hat den erwähnten *Entwicklungssatz* unter Zuhilfenahme des *Komplexen* bewiesen. Auch E. Schmidt braucht zur Konstruktion einer Art Greenscher Funktion das *Komplexe.*

In dieser Arbeit werde ich den Beweis für ähnliche Sätze wie die erwähnten von E. Schmidt und mir *nur im reellen* in möglichst elementarer Weise führen.

Im folgenden wird die Funktionalgleichung

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x-1) \qquad (1)$$
$$n \geqq 1,\ c_n \neq 0,$$

wo die c reell sind, betrachtet werden.

Diese Gleichung soll für alle endlichen reellen x Gültigkeit haben. Deswegen müssen wir fordern, *$f(x)$ solle für alle endlichen reellen x n-mal stetig differentiierbar sein. Außerdem soll $f(x)$ reell und eindeutig sein. Nur solche Funktionen werden im folgenden als Lösungen der Gleichung* (1) *bezeichnet.* Aus (1) können wir dann schließen:

I. *Jede Lösung $f(x)$ der Gleichung* (1) *ist eine für alle reellen endlichen x beliebig oft stetig differentiierbare Funktion.*

Eine unendliche Menge von Lösungen läßt sich sofort angeben. Das sind die Lösungen von der Form

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}\cos\beta x \end{cases} \qquad (2)$$

und deren lineare Kombinationen.

---

1) Berichte der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. 1912, Bd. LXIV, Heft 4, S. 167—236. Vgl. außerdem meine Arbeiten in den Berichten der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. LXV 1913, Juni- und Oktoberheft.

2) a. a. O. S. 232. 3) a. a. O. S. 186.

4) Mathem. Annalen Bd. 65, 1908, S. 87.

5) a. a. O. S. 199—212.

Dabei ist $\alpha + i\beta$ eine Wurzel der Gleichung

$$c_0 + c_1\varrho + \cdots + c_n\varrho^n = A(\varrho) = e^{-\varrho}. \tag{3}$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Wurzeln, wie sich mit Hilfe eines Satzes von HADAMARD[1]) beweisen läßt.[2])

Unter der Annahme, daß die Gleichung $A(\varrho) = 0$ nur reelle Wurzeln hat und $n \geqq 1$, $c_n \neq 0$ ist, werde ich beweisen, *daß es nur eine endliche Zahl linear unabhängiger Lösungen von* (1) *gibt, für die*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x} = 0$$

ist, wo $\alpha + i\beta$ *eine Wurzel von* (3) *ist.* (Satz VIII)[3]).

Außerdem werde ich zeigen, *daß die Anzahl der in irgend einem Intervall von der Länge* 1 *gelegenen Nullstellen jeder Lösung* $f(x)$ *von* (1), *für die*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x} = 0$$

ist, unterhalb einer nur von n *und der Wurzel* $\alpha + i\beta$ *abhängigen endlichen Grenze liegt.* (Satz IX.)

Der Gang des Beweises ist folgender:

Es wird der Satz bewiesen:

Rückt man das Intervall $u - 1 \leqq x \leqq u$ *in der Richtung nach* $-\infty$, *so verliert es nicht mehr als* n *Nullstellen einer Lösung von* (1). (Satz IV.)

Gibt es k oder mehr als k linear unabhängige Lösungen von (1), für die

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)e^{-\alpha x}$$

ist, so wird gezeigt, daß die Lösung

$$F = d_1 f_1 + d_2 f_2 + \cdots + d_k f_k + e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma),$$

wo $d_1 \cdots d_k$ Konstante sind, bei geeigneter Wahl der d im Intervall $w - 1 \leqq x \leqq w$ mindestens $k + 1$ Nullstellen hat. Ein unterhalb

---

1) Journal de mathém. (4), 9, 1893.

2) Etwa wie es HERGLOTZ a. a. O. im Falle einer ähnlichen Gleichung tut.

3) In einer weiteren Arbeit werde ich zeigen, daß diese Lösungen lineare Aggregate der Lösungen von der Form $e^{\mu x} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda x$ sind, deren $\mu > \alpha$ sind. Vgl. die Voranzeige in den Ber. der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. LXV 1913 Juniheft.

dieses Intervalls gelegenes Intervall muß dann nach Satz (IV) *mindestens* $k + 1 - n$ Nullstellen haben. Aber in der Nähe von $-\infty$ überwiegt in F der Einfluß des Gliedes $e^{\alpha x}(\sin \beta x + \gamma)$ derart, daß F in einem Intervall $u - 1 \leqq x \leqq u$ in der Nähe von $-\infty$ *höchstens* mn Nullstellen hat, wo m die Zahl der Nullstellen von $\sin \beta x$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ ist. Aus den beiden Ungleichungen für die Zahl der Nullstellen von F in Intervallen $u - 1 \leqq x \leqq u$ in der Nähe von $-\infty$ ergibt sich für k die obere Grenze $nm + n - 1$, die bei geeigneter Wahl von u auf $nm + n - 2$ herabgedrückt wird.

Ähnliche Betrachtungen führen auf den anderen Satz.

Wenn nicht anders bemerkt, sind die Funktionen und die Variabelen im folgenden reelle.

II. Sätze über die Anzahl der Nullstellen und der Zeichenwechselstellen in Intervallen von der Länge 1.

1. Zeichenerklärungen.

a) Die Gesamtheit der reellen $z - 1 \leqq x \leqq z$ werde als das Intervall $I(z)$ bezeichnet. Das Intervall $u \leqq x \leqq v$ werde durch $I(u, v)$ dargestellt.

b) Die Anzahl der Punkte von $I(z)$, die Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind, sei $N(z; f)$, wo eine Verwechslung nicht möglich ist, $N(z)$. $N(u, v; f)$ ist die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $I(u, v)$.

Dabei ist jede Nullstelle einfach gezählt, auf die Multiplizität ist also keine Rücksicht genommen.

$N(u, u; f)$ ist dann Eins oder Null, je nachdem u eine Nullstelle von $f(x)$ ist oder nicht. Demnach ist die Anzahl der Nullstellen im Intervall $u \leqq x < v$

$$N(u, v) - N(v, v).$$

Die Anzahl der Nullstellen im Intervall $u \leqq x \leqq z$ kann, wenn v ein Punkt zwischen u und z ist, aus der Anzahl der Nullstellen im Intervall $u \leqq x < v$ und der Anzahl der Nullstellen im Intervall $v \leqq x \leqq z$ zusammengesetzt werden. Mithin ist

$$N(u, z) = N(u, v) + N(v, z) - N(v, v), \tag{4}$$

wo

$$u \leqq v \leqq z$$

ist. (Für $u = v$ oder $v = z$ ist (4) ohne weiteres evident.)

c) Verschwindet $f(x)$ für alle Punkte von $I(u, v)$, während in beliebiger Nähe der Endpunkte dieses Intervalls zwei Punkte, der eine unterhalb u, der andere oberhalb v, gefunden werden können, in denen $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen hat und nicht Null ist, so werde das *ganze Intervall* $I(u, v)$ bzw. der Punkt u, wenn $u = v$ ist, eine *Zeichenwechselstelle* genannt.[1])

Die Anzahl der vollständig im Intervall $u < x < v$ enthaltenen Zeichenwechselstellen sei $Z(u, v; f)$. Ist $u = v - 1$, so schreiben wir $Z(v; f)$. Wo eine Verwechselung nicht möglich ist, gebrauchen wir die Bezeichnungen $Z(u, v)$ und $Z(v)$.

2. Hilfssätze.

$v < u$ seien zwei Nullstellen von $f'(x)$. Im Intervall $I(v, u)$ möge $f'(x)$ existieren, reell und stetig sein. Dann ist $f'(x)$ integrabel und

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ v+\varepsilon}} \int^{u-\varepsilon} f'(x)\,dx = \int_v^u f'(x)\,dx = 0.$$

Im Intervall $v < x < u$ muß also mindestens eine Nullstelle von $f'(x)$ liegen. Mithin ist

$$N(v, u; f') - N(v, v; f') - N(u, u; f') \geqq 1. \tag{5}$$

Verschwindet $f(x)$ in $I(v, u)$ nicht identisch, so hat $f'(x)$ im Intervall $v < x < u$ mindestens eine Zeichenwechselstelle. Daher ist

$$Z(v, u; f') \geqq 1. \tag{5a}$$

L_k sei eine reelle mindestens einmal stetig differentiierbare Funktion von x. Die Konstanten a_k und $b_k \neq 0$ mögen reell und endlich sein. Dann ist

$$L_{k+1} = a_k L_k + b_k L_k' = b_k e^{-\frac{a_k}{b_k}x} \cdot \frac{d\, e^{\frac{a_k}{b_k}x} \cdot L_k}{dx}$$

und wir sehen, wenn wir uns das Intervall $I(y, w)$ durch Nullstellen von L^k in Teilintervalle zerlegt denken und (5) auf jedes der Teilintervalle anwenden, daß aus

$$\begin{aligned} &N(y, w; L_k) \geqq m \\ &N(y, w, L_{k+1}) \geqq m - 1 + N(w, w; L_{k+1}) \end{aligned} \tag{6a}$$

---

1) Vgl. SCHÜRER, a. a. O. S. 194 u. 195.

folgt.[1]) Auf der rechten Seite sind einige Glieder, die nicht negativ sind, weggelassen worden. Lassen wir Beziehungen mit dem Zeichen ∞ zu[2]), so erhalten wir aus (6a)

$$(6) \quad N(y, w; L_{k+1}) \geqq N(y, w; L_k) - 1 + N(w, w; L_{k+1}).$$

Wir beginnen mit $k = 0$ und wenden unter der Voraussetzung, daß L_0 n-mal stetig differentiierbar ist, (6) n-mal an:

$$(7) \qquad N(y, w; L_n) \geqq N(y, w; L_0) - n + N(w, w; L_n),$$

wo wieder rechts nicht negative Glieder fortgelassen worden sind.

Wenn wir diese Beziehung in der Form

$$(7a) \qquad N(y, w; L_n) - N(w, w; L_n) \geqq N(y, w; L_0) - n$$

schreiben, haben wir links die Anzahl der Nullstellen von L_n im Intervall $y \leqq x < w$.

L_n ist eine lineare Funktion von $L_0, L_0' \cdots L_0^{(n)}$. Ist

$$L_k = \sum_0^k{}_m c_{km} L_0^{(m)},$$

so erhalten wir aus der Rekursionsformel für L für die c die rekurrierenden Gleichungen

$$c_{k+1,m} = a_k c_{km} + b_k c_{k,m-1},$$
$$m = 0, 1, 2 \cdots k$$
$$k = 0, 1 \cdots n,$$
$$c_{00} = 1, \quad c_{0,-1} = 0, \quad c_{1,-1} = 0, \quad c_{2,-1} = 0 \text{ usw.},$$

die die c eindeutig bestimmen.

Dieselben Rekursionsformeln ergeben sich für die Koeffizienten c_{km} in

$$\prod_0^k{}_\nu (a_\nu + b_\nu x) = \sum_0^k{}_m c_{km} x^m.$$

Setzen wir $L_0 = f(x)$ und

$$L_n = c_0 f + c_1 f' + \cdots + c_n f^{(n)},$$

---

1) Jedem der beiden Zeichen $>$ und $=$ der oberen Beziehung entsprechen beide Zeichen der zweiten Beziehung.

2) Ist $N(y, w; L_k)$ unendlich, so sagt (6), daß dann auch $N(y, w; L_{k+1})$ unendlich ist.

so sehen wir jetzt, daß die a_k und b_k dann und nur dann reell und endlich sind, und b_k von Null verschieden ist, wenn die c reell sind, $c_n \neq 0$ ist, und die Gleichung

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = A(x) = 0 \tag{8}$$

nur reelle Wurzeln hat.

Mit Rücksicht auf das ebengesagte ergibt (7a) den *Hilfssatz*:

II. *$f(x)$ sei eine reelle im Intervall $y \leqq x \leqq w$ n-mal stetig differentiierbare Funktion. $c_n \neq 0$, $c_{n-1}, \cdots, c_1, c_0$ seien reelle Konstante. Hat dann die Gleichung*

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

nur reelle Wurzeln, so hat

$$L_n(f(x)) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x)$$

im Intervall $y \leqq x < w$ höchstens n Nullstellen weniger als $f(x)$ im Intervall $y \leqq x \leqq w$.

Wir werden jetzt einen ähnlichen Satz über die Zeichenwechselstellen herleiten.

Wir zerlegen das Intervall $I(y, w)$ durch Nullstellen von $L_0 = f(x)$ in Teilintervalle $I(y, u_1)$, $I(u_1, u_2)$ usw. Es können aber nicht alle Nullstellen verwendet werden, sondern die $u_1, u_2 \cdots$ sollen so gewählt werden, daß in $I(u_1, u_2)$, $I(u_2, u_3) \cdots I(u_{m-1}, u_m)$ L_0 nicht identisch verschwindet. Ist insbesondere $N(y, w; L_0)$ endlich, so genügen alle Nullstellen in $I(y, w)$ dieser Bedingung. Das Intervall $I(y, w)$ möge durch m Nullstellen von L_0 in Teile von der erwähnten Beschaffenheit zerlegt werden können. Auf die Teilintervalle $I(u_1, u_2)$, $I(u_2, u_3) \cdots$ wenden wir (5a) an und erhalten

$$Z(y, w; L_1) \geqq m - 1. \tag{5b}$$

Da z. B. diejenige der auf der rechten Seite von (5b) gezählten Zeichenwechselstellen, die zwischen u_1 und u_2 liegt, ganz im Intervall $u_1 < x < u_2$ liegt, existiert zufolge der Definition der Zeichenwechselstelle zwischen dem oberen Endpunkt derselben und u_2 ein Punkt, in dem $L_1 \neq 0$ ist. Aus demselben Grunde gibt es zwischen u_2 und dem unteren Endpunkte derjenigen von den auf der rechten Seite von (5b) gezählten Zeichenwechselstellen, die ganz im Intervall $u_2 < x < u_3$ liegt, Punkte, in denen $L_1 \neq 0$ ist usw.

In jeder der auf der rechten Seite von (5b) gezählten Zeichenwechselstellen nehmen wir einen Punkt $u'_1, u'_2 \cdots u'_{m-1}$ an. Nach dem vorigen zerlegen die $u'_1 \cdots u'_{m-1}$ das Intervall $I(y, w)$ so, daß

in $I(u_1', u_2')$ usw. L_1 nicht identisch verschwindet. Wir können daher auf L_1, indem wir an Stelle von L_0 L_1 setzen (5b) anwenden und erhalten

$$Z(y, w; L_2) \geqq m - 2.$$

Die vorhergehende Argumentation läßt sich wiederholt anwenden und wir erhalten schließlich

$$Z(y, w; L_n) \geqq m - n. \tag{9}$$

Damit sind wir zu folgendem *Hilfssatze* gelangt:

III. *$f(x)$ sei eine reelle n-mal stetig differentiierbare Funktion im Intervall $y \leqq x \leqq w$. $c_0, c_1 \ldots c_n \neq 0$ seien reelle Konstante. Hat dann die Gleichung*

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0 \qquad n \geqq 1$$

nur reelle Wurzeln, so hat

$$L_n(f) = c_0 f + c_1 f' + \cdots + c_n f^{(n)}$$

im Intervall $y < x < w$ mindestens $m - n$ Zeichenwechselstellen, wenn unter den in $y \leqq x \leqq w$ gelegenen Nullstellen von $f(x)$ m so ausgewählt werden können, daß zwischen je zwei aufeinander folgenden von ihnen $f(x)$ nicht identisch verschwindet.

3. Über die Anzahl der Nullstellen und der Zeichenwechselstellen von Lösungen in Intervallen von der Länge 1.

Aus (4) folgt, wenn wir $u = y - 1$, $z = w$, u einmal gleich y und ein andermal gleich $w - 1$ setzen, die rechten Seiten der erhaltenen Gleichungen gleich setzen und schließlich $N(y)$ auf die linke Seite bringen

$$N(y) = N(w) + N(y, y) + N(w - 1, y - 1) - N(w, y) - N(w - 1, w - 1). \qquad y \leqq w \tag{10}$$

Ist eins der Glieder auf der rechten Seite nicht endlich, so haben die Nullstellen in $I(y - 1, w)$ eine Häufungsstelle u. Dann ist, wie wir gleich zeigen werden, $N(y)$ unendlich, und wir haben, wenn wir Gleichungen mit dem Zeichen ∞ zulassen[1]),

$$N(y) \geqq N(w) + 1 - n. \tag{11}$$

Liegen nämlich z. B. für positive beliebig kleine ε in $I(u, u + \varepsilon)$ unendlich viel Nullstellen, so zeigt Hilfssatz II mit Rücksicht auf (1),

1) Seite 143, Anm. 2.

daß auch in $I(u-1, u-1+\varepsilon)$, $I(u-2, u-2+\varepsilon)$ ... unendlich viel Nullstellen der Lösung $f(x)$ von (1) liegen. Ist m die größte ganze Zahl (inkl. der Null), die nicht größer als $u-y+1$ ist, so ist $y-(u-m)>0$. Wir wählen $\varepsilon = y-(u-m)$. $I(u-m, u-m+\varepsilon)$ liegt dann in $I(y)$. Deswegen ist $N(y)$ unendlich, w. z. b. w. Analoges gilt für negative ε.

Jetzt können wir voraussetzen, daß auf der rechten Seite von (10) nur endliche Glieder stehen. Ist y eine Nullstelle von $f(x)$, so haben wir

$$N(y, y; f) = 1.$$

Ist $f(x)$ Lösung von (1), so ist

$$N(w-1, w-1; f) = N(w, w; L_n(f))$$
$$N(y-1, w-1; f) = N(y, w; L_n(f))$$

und Hilfssatz II ergibt

$$N(y-1, w-1, f) \geqq N(y, w; f) - n + N(w-1, w-1; f).$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen gewinnen wir aus (10)

$$N(y) \geqq N(w) + 1 - n. \tag{12}$$

Beachten wir die Bemerkung, die auf (11) führt, so sehen wir, daß (12) allgemein gilt.

(12) enthält den *Satz:*

IV. *Jede Lösung $f(x)$ der Gleichung*

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x-1), \qquad n \geqq 1 \quad c_n \neq 0$$

wo die c reell sind, und die Gleichung

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, hat im Intervall $y-1 \leqq x \leqq y$ höchstens $n-1$ Nullstellen weniger als im Intervall $w-1 \leqq x \leqq w$, wenn $y \leqq w$ und y eine Nullstelle von $f(x)$ ist.[1])

Wir wollen einen ähnlichen Satz für die Zeichenwechselstellen finden.

Wir wählen $z < w-1$. In $z < x < w-1$ mögen ζ Zeichenwechselstellen der Lösung $f(x)$ der Gleichung (1) liegen. Da jede Zeichenwechselstelle Nullstellen enthält, ist

$$\zeta \leqq \nu, \tag{α}$$

1) Vgl. meine Arbeit „Über die Funktionaldifferentialgleichung usw." Leipziger Berichte 1912 Heft 4 S. 198 Satz VI.

wo ν die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $z<x<w-1$ ist. ν können wir folgendermaßen ausdrücken

$$(\beta) \qquad \nu = N(z, w) - N(z, z) - N(w).$$

In $z-1<x<w-1$ mögen ξ Zeichenwechselstellen liegen. ξ setzt sich zusammen aus den Zeichenwechselstellen von $z-1<x<z$ und den ζ Zeichenwechselstellen von $z<x<w-1$. Dazu kommt, wenn z Nullstelle von $f(x)$ ist, also $N(z,z)=1$ ist, eventuell noch eine Zeichenwechselstelle, die den Punkt z enthält. Mithin ist

$$\xi \leqq \zeta + Z(z) + N(z, z)$$

oder wegen (α)

$$(8) \qquad Z(z) \geqq \xi - \zeta - N(z,z) \geqq \xi - \nu - N(z,z).$$

Nach (1) und Hilfssatz II ist, wenn $N(z, w; f)$ endlich ist,

$$\xi \geqq N(z,w) - n.$$

Setzen wir dies und (β) in (γ) ein, so kommt

$$(13) \qquad Z(z) \geqq N(w) - n. \qquad {}_{z<w-1}$$

Was sich über Z sagen läßt, wenn $N(z, w; f)$ oder $N(w, f)$ unendlich ist, wird jetzt gezeigt werden.

Ist für irgendein Intervall die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ unendlich, so haben die Nullstellen mindestens eine Häufungstelle u, und nach Hilfssatz I und (1) ist auch $u-1$ eine Häufungsstelle von Nullstellen. In u und $u-1$ verschwindet $f(x)$ mit sämtlichen Differentialquotienten. Daher verschwinden in diesen Punkten auch $L_1(f)$, $L_2(f)$ usw. In $I(u)$ verschwindet $f(x)$ nicht identisch, sonst würde $f(x)$ wegen (1) für alle x verschwinden. Daher liegt nach (5b) in $u-1<x<u$ mindestens eine Zeichenwechselstelle $I(u_{11}, v_{11})$ von $L_1(f)$. In $I(u-1, u_{11})$ und $I(v_{11}, u)$ verschwindet zufolge der Definition der Zeichenwechselstelle $L_1(f)$ nicht identisch. Ist daher u'_{11} ein Punkt von $I(u_{11}, v_{11})$, so liegt nach (5b), wo für f $L_1(f)$ und für L_1 L_2 zu setzen ist, in $u-1<x<u'_{11}$ und $u'_{11}<x<u$ mindestens je eine Zeichenwechselstelle $I(u_{12}, v_{12})$, $I(u_{22}, v_{22})$ von $L_2(f)$. Sind u'_{21} und u'_{22} Punkte dieser Intervalle, so verschwindet in $I(u-1, u'_{21})$, $I(u'_{21}, u'_{22})$, $I(u'_{22}, u)$ zufolge der Definition der Zeichenwechselstelle $L_2(f)$ nicht identisch. Wir wenden dasselbe Verfahren wiederholt an und finden, daß in $u-1<x<u$ mindestens n Zeichenwechselstellen von $L_n(f)$, $n+1$ Zeichenwechselstellen von $L_1(L_n(f))$, ... $2n$ Zeichenwechselstellen von $L_n(L_n(f))$

usw. existieren. Beachten wir, daß zufolge (1) $L_n(f(x)) = f(x-1)$, $L_n L_n(f(x)) = f(x-2)$ usw. ist, so sehen wir, daß Intervalle gefunden werden können, in denen $f(x)$ beliebig viel Zeichenwechselstellen hat.

Diese Bemerkung in Verbindung mit (13) gibt den *Satz:*

V. *Haben die Nullstellen einer Lösung $f(x)$ der Gleichung*

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x-1) \quad n \geqq 1, \; c_n \neq 0$$

wo die c reell sind, und die Gleichung

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, im Endlichen keine Häufungsstellen, so ist die Anzahl der Zeichenwechselstellen von $f(x)$ im Intervall $z-1 < x < z$ höchstens um n geringer als die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $w-1 \leqq x \leqq w$, wenn $z < w-1$ ist. Haben die Nullstellen von $f(x)$ Häufungsstellen, so lassen sich Intervalle angeben, in denen $f(x)$ beliebig viel Zeichenwechselstellen hat.

III. Über die Lösungen, für die $\lim_{x \to -\infty} f(x) e^{-\alpha x} = 0$ ist.

1. Ein Hilfssatz.

Die reelle n-mal stetig differentiierbare Funktion $f(x)$ habe im Intervall $I(z)$ nur die Nullstellen $w_1 > w_2 \ldots > w_m$. Um die Nullstellen herum werden die Intervalle

$$\begin{aligned} w_1 - \varepsilon_1 &\leqq x \leqq w_1 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ w_m - \varepsilon_1 &\leqq x \leqq w_m + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

abgegrenzt, wo ε_1 und ε_2 positive Größen von solcher Kleinheit sind, daß die Intervalle keine gemeinsamen Punkte haben. Der Teil der Gesamtheit dieser Intervalle, der in $I(z)$ liegt, werde mit I_1 bezeichnet. Die Gesamtheit der Punkte, die $I(z)$ außer den in I_1 gelegenen noch hat, sei I_2.

φ möge ebenfalls eine n-mal stetig differentiierbare Funktion sein. Ist in I_2

$$|\varphi| < |f(x)|,$$

so hat

$$F = f + \varphi$$

in I_2 keine Nullstellen.

In I_1 sei

$$|L_n(\varphi)| < |L_n(f)|.$$

Es hat dann $L_n(F)$ in I_1 keine Nullstellen.

Im Intervall $w_k - \varepsilon_1 \leqq x \leqq w_k + \varepsilon_2$ möge $F(x)$ l Nullstellen haben. Nach Hilfssatz *II* hat $L_n(F)$ im selben Intervall mindestens $l - n$ Nullstellen. Nach dem vorigen muß also $l \leqq n$ sein. Damit haben wir den Hilfssatz erhalten:

VI. *$f(x)$ und $\varphi(x)$ seien reelle n-mal stetig differentiierbare Funktionen. $f(x)$ habe im Intervall $I(z)$ nur die Nullstellen*

$$w_1 > w_2 \ldots > w_m.$$

Ist in dem Teil der Intervalle

$$\begin{aligned} w_1 - \varepsilon_1 &\leqq x \leqq w_1 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ w_m - \varepsilon_1 &\leqq x \leqq w_m + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

wo ε_1 und ε_2 positive Größen von solcher Kleinheit sind, daß die Intervalle keine gemeinsamen Punkte haben, der in $I(z)$ liegt,

$$|L_n(\varphi(x))| < |L_n(f(x))|$$

und im übrigen Teile von $I(z)$

$$|\varphi| < |f|,$$

so hat die Funktion

$$F = f + \varphi$$

im Intervall $I(z)$ nicht mehr als $n \cdot m$ Nullstellen.

2. Eine Folge der Bedingung $|\varphi(x)| < C \cdot e^{\alpha x}$.

$\varphi(x)$ sei eine Lösung von (1). Im Intervall $z - 2 \leqq x \leqq z$ sei

$$|\varphi(x)| < C \cdot e^{\alpha x},$$

wo $\alpha + i\beta$ eine Wurzel von (3) ist.

Wir setzen jetzt

$$e^{\alpha x} \sin \beta(x - z) = f(x).$$

$f(x)$ ist Lösung von (1). $f(x)$ möge in $I(z)$ m Nullstellen haben. Mithin ist

$$\frac{\pi(m-1)}{\beta} \leqq 1$$

$$\frac{\pi m}{\beta} > 1.$$

Die Nullstellen sind

$$z, \quad z - \frac{\pi}{\beta}, \quad z - \frac{2\pi}{\beta} \cdots z - \frac{(m-1)\pi}{\beta}; \quad z - \frac{m\pi}{\beta} \cdots$$

Zwischen diesen liegen die Punkte

$$z-\delta, \quad z-\frac{\pi}{\beta}-\delta \ \ldots\ z-\frac{(m-1)\pi}{\beta}-\delta \text{ usw.}$$

$$0<\delta<\frac{\pi}{\beta}, \qquad \delta=\frac{m\pi}{\beta}-1\ ^{1})$$

in denen $L_n(f)=0$ ist.

Beweis:

Wir setzen $x=z-\frac{k\pi}{\beta}+u$, wo u als Veränderliche gilt. Dann ist

$$L_n(f(x)) = \text{const}\cdot L_n(e^{\alpha u}\sin\beta u).$$

Da es Punkte geben muß, in denen $L_n(f)=0$ ist, da sonst wegen (1) f keine Nullstellen hätte, muß nach der eben erhaltenen Gleichung jedes Intervall $w_{k+1}\leqq x<w_k$ zwischen zwei Nullstellen w_{k+1} und w_k von $f(x)$ gleichviel Nullstellen von $L_n(f(x))$ enthalten. Rücken wir den oberen Endpunkt von $I(z)$ von z nach $z-\frac{\pi}{\beta}$, so verliert das Intervall die Nullstelle z von $f(x)$. Am unteren Ende aber treten die Nullstellen ein, die zufolge (1) von den Nullstellen von $L_n(f(x))$ im Intervall $z-\frac{\pi}{\beta}\leqq x<z$ erzeugt werden. Daraus sehen wir, daß, wenn $L_n(f(x))$ im Intervall $z-\frac{\pi}{\beta}\leqq x<z$ mehr als eine Nullstelle hätte, $N(z,f)$ über alle Grenzen wachsen müßte, wenn z nach $-\infty$ rückt.

Wäre ferner $\delta=0$ oder $=\frac{\pi}{\beta}$, so wären alle Nullstellen von $f(x)$ auch Nullstellen von $L_n(f(x))$. $f(x)$ läßt sich in der Form

$$f(x)=e^{\alpha z}\left(e^{(\alpha+i\beta)(x-z)}-e^{(\alpha-i\beta)(x-z)}\right)\cdot\frac{1}{2i}$$

darstellen. Mithin ist

$$L_n(f(x))\,|_{x=z}=\frac{e^{\alpha z}}{2i}\left[A(\alpha+i\beta)-A(\alpha-i\beta)\right].$$

Wegen (3) wäre also

$$e^{-\alpha-i\beta}=e^{-\alpha+i\beta}$$

---

1) Nach (1) ist $z+\frac{\pi}{\beta}-\delta-1$ Nullstelle von f. Wie man mit Hilfe des folgenden Beweises erkennen kann, ist es die tiefste Nullstelle in $I(z)$. Also ist

$$z+\frac{\pi}{\beta}-\delta-1=z-\frac{(m-1)\pi}{\beta} \text{ usw.}$$

und β müßte gleich Null sein. —

Wir setzen jetzt

$$\varepsilon_1 = \delta \cdot \xi \qquad 0 < \xi < 1$$

und

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\pi}{\beta} - \delta\right) \cdot \xi,$$

wo ξ noch bestimmt werden wird, und bilden wie im vorigen Abschnitt die Intervalle

$$z - \varepsilon_1 \leqq x \leqq z + \varepsilon_2$$

$$z - \frac{\pi}{\beta} - \varepsilon_1 \leqq x \leqq z - \frac{\pi}{\beta} + \varepsilon_2$$

usw.

Die untere Grenze von $|f(x)|$ im Intervall

$$z - \frac{k\pi}{\beta} + \varepsilon_2 \leqq x \leqq z - \frac{(k-1)\pi}{\beta} - \varepsilon_1$$

ist die nicht größere der beiden Größen

$$e^{z\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha(k-1)\pi}{\beta}} \cdot e^{-\alpha\varepsilon_1} \cdot |\sin \beta\varepsilon_1|$$

und

$$e^{z\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha k\pi}{\beta}} \cdot e^{+\alpha\varepsilon_2} \cdot |\sin \beta\varepsilon_2|.$$

Wie oben setzen wir

$$x = z - \frac{k\pi}{\beta} + u. \qquad 0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{\beta}$$

Die erwähnte untere Grenze ist dann die nicht größere der beiden Größen

$$e^{x\alpha} \cdot (e^{-\alpha u} \cdot e^{\frac{\pi\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\alpha\varepsilon_1} \cdot |\sin \beta\varepsilon_1|)$$

und

$$e^{x\alpha}(e^{-\alpha u} \cdot e^{\alpha\varepsilon_2} |\sin \beta\varepsilon_2|).$$

Die unteren Grenzen der Ausdrücke in den Klammern für $0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{\beta}$ sind von Null verschieden (weil $\beta\varepsilon_1$ und $\beta\varepsilon_2$ beide kleiner als π sind). Die nicht größere von beiden sei P. In I_2 ist also

$$P \cdot e^{x\alpha} \leqq |f(x)|.$$

Wählen wir daher $C \leqq P$, so ist in I_2

$$|\varphi| < |f(x)|.$$

Wir wollen jetzt etwas über das Verhalten von $L_n(\varphi)$ in I_1 erfahren.

Nach (1) sind $z-\delta-1$, $z-\frac{\pi}{\beta}-\delta-1$ usw. Nullstellen von $f(x)$. Wir greifen die heraus, die im Intervall $I(z-1)$ liegen und nehmen noch die dem Punkte $z-1$ am nächsten gelegene Nullstelle w des Intervalls $I(z)$ hinzu (Zusammenfallen von w und $z-1$ ist wie oben bewiesen ausgeschlossen). Zwischen diesen Nullstellen liegen die Intervalle

$$\left.\begin{array}{l} z-1-\varepsilon_1 \leqq x \leqq z-1+\varepsilon_2 \\ \vdots \\ z-\frac{(m-1)\pi}{\beta}-1-\varepsilon_1 \leqq x \leqq z-\frac{(m-1)\pi}{\beta}-1+\varepsilon_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = I_1' \\ \vdots \\ = I_m'. \end{array}$$

Wir wollen haben, daß diese Intervalle in den Intervallen

$$\left.\begin{array}{l} z-\delta-1+\varepsilon_2 \leqq x \leqq w-\varepsilon_1 \\ z-\delta-1-\frac{\pi}{\beta}+\varepsilon_2 \leqq x \leqq z-\delta-1-\varepsilon_1 \\ \vdots \\ z-\delta-1-\frac{(m-1)\pi}{\beta}+\varepsilon_2 \leqq x \leqq z-\frac{(m-2)\pi}{\beta}-\delta-1-\varepsilon_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = I_1'' \\ = I_2'' \\ \vdots \\ = I_m'' \end{array}$$

enthalten sind.

Die Forderungen

$$I_2' \text{ in } I_2'' \ldots \quad I_m' \text{ in } I_m''$$

ergeben die Bedingungen

$$\xi \cdot \frac{\pi}{\beta} \leqq \delta$$

und

$$\xi \cdot \frac{\pi}{\beta} \leqq \frac{\pi}{\beta} - \delta.$$

Die Forderung I_1' in I_1'' ergibt außer einer dieser Bedingungen noch

$$z-1+\varepsilon_2 \leqq w-\varepsilon_1 = z-\frac{(m-1)\pi}{\beta}-\varepsilon_1$$

oder

$$\xi \cdot \frac{\pi}{\beta} \leqq 1-\frac{(m-1)\pi}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} - \delta,$$

also eine der schon vorhandenen Bedingungen.

Wie oben bewiesen worden ist, ist

$$0 < \delta < \frac{\pi}{\beta}.$$

Mithin kann ein den beiden Bedingungen genügendes $0 < \xi < 1$ angegeben werden, etwa

$$\xi = \frac{\delta\left(\frac{\pi}{\beta} - \delta\right)}{\frac{\pi^2}{\beta^2}}.$$

Jetzt sind die Größen δ, ξ, ε_1, ε_2 und P definiert. Es mag hervorgehoben werden, daß sie nur von α und β abhängen.

Die Intervalle I'' enthalten einen dem I_2 entsprechenden Bereich in $I(z-1)$. Auch für diesen ist

$$P \cdot e^{\alpha x} \leqq |f(x)| \quad \text{und} \quad |\varphi| < |f|.$$

Da die I' in den I'' liegen, ist auch in den I'

$$|\varphi| < |f|.$$

Die Gesamtheit der Punkte von I', soweit sie in $I(z-1)$ liegen, entsteht aber durch Verschieben des Bereiches I_1 um -1. Wegen (1) ist daher in I_1

$$|L_n(\varphi)| < |L_n(f(x))|.$$

Jetzt sind die beiden Voraussetzungen des Hilfssatzes III. erfüllt, und wir erkennen, *daß, wenn für die Lösung φ von* (1) *im Intervall* $z-2 \leqq x \leqq z$

$$|\varphi(x)| < P \cdot e^{\alpha x}$$

ist, die Lösung

$$F(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta(x - z) + \varphi$$

im Intervall $z-1 \leqq x \leqq z$ *höchstens* $m \cdot n$ *Nullstellen hat.*

Wir verschieben jetzt den oberen Endpunkt des Intervalls $I(z)$ von z nach abwärts bis zu einer Nullstelle des Intervalls $z - \varepsilon_1 \leqq x \leqq z + \varepsilon_2$. Die Verschiebung beträgt höchstens ε_1. Soll das Intervall keine Nullstellen gewinnen, so darf das um $z - 1 - \delta$ herum liegende Intervall nicht in das verschobene Intervall hineinragen, also muß

$$z - 1 - \delta + \varepsilon_2 < z - 1 - \varepsilon_1$$

oder

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \delta$$

sein, welcher Bedingung durch den oben eingeführten Wert von ξ genügt wird.

Verschieben wir das Intervall $I(z)$ nach oben, so können nur

am oberen Ende Nullstellen eintreten. Geht die Verschiebung bis zu einer Nullstelle im Intervall $z - \varepsilon_1 \leqq x \leqq z + \varepsilon_2$, so hat das verschobene Intervall auch nicht mehr Nullstellen als $m \cdot n$, da ja bei der Berechnung einer oberen Grenze von $N(z; F)$ das Intervall $z - \varepsilon_1 \leqq x \leqq z + \varepsilon_2$ mit zu $I(z)$ genommen worden ist.

Jetzt ist bewiesen Hilfssatz[1])

VII. *Ist für alle x unterhalb einer beliebigen endlichen Grenze a*

$$|\varphi(x)| < Pe^{\alpha x},$$

wo $\varphi(x)$ eine Lösung von (1) und $\alpha + i\beta$ eine Wurzel von (3) ist, so ist für jede[2]) Nullstelle $w < a$ von

$$F(x) = \varphi(x) + e^{\alpha x} \cdot \sin\beta(x - z)$$

$$N(w; F) \leqq m \cdot n.$$

m ist die Anzahl der Nullstellen von $\sin\beta x$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$.

Zusatz: Ist $|\varphi(x)| < Pe^{\alpha x}$, so bestimmt in I_2 $\sin\beta(x - z)$ das Vorzeichen von $F(x)$. *In der Umgebung jeder Nullstelle von* $\sin\beta(x - z)$ liegt also *mindestens eine Nullstelle von* $F(x)$.

3. Eine obere Grenze für die Anzahl der Lösungen, für die $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) e^{-\alpha x} = 0$ ist.

Aus der Menge der Lösungen von (1) für die

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) e^{-\alpha x} = 0 \tag{14}$$

ist, greifen wir k heraus:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x)$$

$\alpha + i\beta$ ist wie bisher eine Wurzel der Gleichung (3).

---

1) Vgl. die zit. Arbeit „Über die Funktionaldiff.-Gleichung usw." S. 197. Hilfssatz 2. Dort war der Beweis möglich, da die Größen, die $\varphi(x)$ klein machen, linear in $\varphi(x)$ enthalten sind

$$(\varphi(x) = \varepsilon_1 \lambda_1(x) + \varepsilon_2 \lambda_2(x) + \cdots + \varepsilon_n \lambda_n(x)).$$

Hier ermöglicht der Umstand den Beweis, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ Lösungen von (1) sind.

2) Der Satz ist nur für Nullstellen im Intervall $z - \varepsilon_1 \leq x \leq z + \varepsilon_2$ bewiesen. Zur Übertragung auf den Fall anderer Nullstellen genügt die Andeutung: Für $x < a$ liegen alle Nullstellen von $F(x)$ in den Intervallen $z - \frac{k\pi}{\beta} - \varepsilon_1 \leq x \leq z - \frac{k\pi}{\beta} + \varepsilon_2$. Setzen wir für z eine andere Nullstelle z_1 von $f(x)$, so ist $e^{\alpha x} \sin\beta(x - z) = \pm e^{\alpha x} \sin\beta(x - z_1)$ usw.

Wir können voraussetzen, daß $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x)$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ linear unabhängig sind. Wegen (1) sind sie dann auch im Intervall $I(w)$ linear unabhängig.

$$(15)\qquad \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x), & e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma) \\ \varphi_1(x_1), & \varphi_2(x_1) \cdots \varphi_k(x_1), & e^{\alpha x_1}\sin(\beta x_1+\gamma) \\ \vdots & & \\ \varphi_1(x_k), & \varphi_2(x_k) \cdots \varphi_k(x_k), & e^{\alpha x_k}\sin(\beta x_k+\gamma) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)\cdots\varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_k(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_1(x_k)\varphi_2(x_k)\cdots\varphi_k(x_k) \end{vmatrix}} = F(x)$$

ist eine lineare Funktion von

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\cdots\varphi_k(x) \text{ und } e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma),$$

die die k Nullstellen $x_1, x_2, \cdots x_k$ hat. Da die $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_k$ linear unabhängig sind, lassen sich die voneinander verschiedenen x_1, $x_2 \cdots x_k$ in $I(w)$ so wählen, daß die Nennerdeterminante nicht verschwindet. Der Faktor von $e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$ ist gleich Eins. Da die Funktionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_k(x)$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ linear unabhängig sind, verschwindet $F(x)$ nicht identisch. $F(x)$ läßt sich in der Form schreiben:

$$F(x) = F_1\sin\gamma + F_2\cos\gamma.$$

Da F_1 und F_2 nicht identisch verschwinden, können wir γ so bestimmen, daß $F(x)$ außer in x_1, $x_2 \cdots x_k$ in $I(w)$ noch in einem von diesen verschiedenen Punkte verschwindet. Wir sehen jetzt, daß es eine nicht identisch verschwindende Lösung

$$(15a)\quad F(x) = h_1\varphi_1(x) + h_2\varphi_2(x) + \cdots + h_k\varphi_k(x) + e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$$

von (1) gibt, wo die $h_1, h_2 \cdots h_k, \gamma$ reell und endlich sind, die in $I(w)$ mindestens $k+1$ Nullstellen hat.

C sei endlich und größer als alle $|h_1|, |h_2| \cdots |h_k|$.

P sei die im vorigen Abschnitt bestimmte nur von α und β abhängige Größe.

Wegen (14) können wir das endliche a so bestimmen, daß für $x < a$

$$|\varphi_1| < \frac{Pe^{\alpha x}}{C\cdot k}$$
$$\vdots$$
$$|\varphi_k| < \frac{Pe^{\alpha x}}{C\cdot k}$$

ist. Dann ist

$$|h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_k\varphi_k| < Pe^{\alpha x}$$

für $x < a$.

Der vorige Abschnitt zeigt uns, daß deshalb

$$N(z; F) \leqq m \cdot n \tag{16}$$

ist, wo $m = N(0; \sin\beta x)$ und $z < a$ eine Nullstelle von $F(x)$ ist. $F(x)$ war so bestimmt worden, daß

$$N(w; F) \geqq k + 1$$

ist.

Satz IV. lehrt, daß dann für alle Nullstellen[1]) $z \leqq w$ von F

$$N(z; F) \geqq k + 2 - n$$

ist. Im Vergleich mit (16) ergibt diese Ungleichung

$$k \leqq n(m + 1) - 2. \tag{17}$$

Der Fall $\beta = 0$ bedarf noch einer besonderen Behandlung. Ist $\beta = 0$, so gibt es wegen (15) ein endliches a, sodaß für $x < a$

$$|h_1\varphi_1(x) + \cdots + h_k\varphi_k(x)| < e^{\alpha x}$$

ist. Dann ist für die Lösung

$$F = e^{\alpha x} + h_1\varphi_1(x) + \cdots + h_k\varphi_k(x)$$

$$N(z, F) = 0, \; z < a. \tag{16a}$$

Genau wie im Falle $\beta \neq 0$ wird bewiesen, daß die h so bestimmt werden konnten, daß

$$N(w; F) \geqq k \tag{18}$$

ist.

Ist $N(w; F) > n$, so wenden wir auf die unterste Nullstelle u in $I(w)$ (12) an und erhalten

$$N(u; F) \geqq N(w; F) + 1 - n \geqq 2.$$

Mithin gibt es in $I(u)$ außer u mindestens noch eine Nullstelle $u_1 < u$. Auf u_1 wenden wir wieder (12) an:

$$N(u_1; F) \geqq 2.$$

Es existiert daher eine weitere Nullstelle $u_2 < u_1$ usw. Haben die Nullstellen keine Häufungsstelle, so gibt es in beliebiger Nähe

---

1) F hat in beliebiger Nähe von $-\infty$ Nullstellen, wie am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes gezeigt worden ist.

von $-\infty$ Nullstellen, haben sie eine Häufungsstelle y, so sind wegen (1) auch die Punkte $y-1$, $y-2$ usw. Nullstellen von $F(x)$. In beiden Fällen also gibt es in beliebiger Nähe von $-\infty$ Nullstellen von $F(x)$. Das steht im Widerspruch mit (16a). Daher muß

$$N(w; F) \leqq n$$

und wegen (18)

(17a) $$k \leqq n$$

sein.

Das Resultat dieses Abschnittes bildet der Satz:

VIII. *Ist $\alpha + i\beta = \varrho$ eine Wurzel der Gleichung mit reellen Koeffizienten*

$$c_0 + c_1\varrho + \cdots + c_n\varrho^n = e^{-\varrho} \qquad c_n \neq 0,\ n \geqq 1,$$

und sind die Wurzeln von

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = 0$$

sämtlich reell, so hat die Funktionalgleichung

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x-1)$$

nur eine endliche Zahl und zwar nicht mehr als $(m+1)\,n-2$ linear unabhängige Lösungen, für die

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) e^{-\alpha x} = 0$$

ist. Die ganze Zahl m wird so bestimmt, daß

$$\frac{m\pi}{\beta} > 1 \qquad \frac{(m-1)\pi}{\beta} \leqq 1$$

ist.

Ist $\beta = 0$, so gibt es nicht mehr als n linear unabhängige Lösungen, die der angegebenen Bedingung genügen.[1])

4. Eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen der Lösungen, für die

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) e^{-\alpha x} = 0$$

ist, in Intervallen von der Länge 1.

$f(x)$ sei eine Lösung von (1), die der Bedingung (14) genügt. Nach Satz (V) gibt es ein endliches z, für das

(19) $$Z(z; f) \geqq N(w; f) - n$$

ist. w ist ein beliebiger fester Punkt im Endlichen.

---

1) Vgl. die zit. Arbeit „Über die Funktionaldiff.-Gleichung" S. 193 Satz Va.

In $I(z)$ können wir jetzt $N(w) - n + 1$ Punkte $u_1 < u_2 < \cdots$ so angeben, daß die Reihe

$$f(u_1) \neq 0,\ f(u_2) \neq 0 \cdots$$

wechselnde Vorzeichen hat. Hat die Reihe unendlich viel Glieder, so brechen wir sie bei irgend einem Gliede ab. Wir bringen dies dadurch zum Ausdruck, daß wir unter $\overline{N}(w; f)$ im Falle, daß $N(w; f)$ endlich ist, $N(w; f)$ verstehen, andernfalls dafür eine beliebige endliche aber für das folgende feste Zahl setzen und die Reihe mit dem $(\overline{N}(w; f) - n + 1)$-ten Gliede abbrechen.

$c > 0$ sei kleiner als alle die Größen

$$|f(u_1)|,\ |f(u_2)| \cdots$$

der eventuell abgebrochenen Reihe.

Die obere Grenze von $e^{\alpha x}$ in $I(0)$ sei p. Die obere Grenze von $|e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma)|$ in $I(z)$ ist dann nicht größer als

$$e^{\alpha z} \cdot p.$$

Wählen wir also

$$|\varepsilon| < \frac{c}{p} e^{-\alpha z},$$

so hat die Lösung

$$f(x) + \varepsilon e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma) = F(x)$$

in den Punkten $u_1, u_2 \cdots$ dasselbe Vorzeichen wie $f(u_1), f(u_2)$ usw. Mithin ist wegen der Stetigkeit von $F(x)$ und (19)

$$N(z; F) \geqq \overline{N}(w; f) - n. \tag{20}$$

Hilfssatz VII einschließlich des Zusatzes zeigt, daß $F(x)$ in beliebiger Nähe von $-\infty$ Nullstellen u hat und, daß für diese

$$N(u; F) \leqq m \cdot n \tag{21}$$

ist (wegen m siehe Seite 149).

Nach Satz (II) ist

$$N(u; F) \geqq N(z, F) + 1 - n.$$

Beachten wir (21), so erhalten wir daraus

$$N(z, F) - n + 1 \leqq m \cdot n.$$

Mithin ist wegen (20)

$$\overline{N}(w; f) \leqq (m + 2)n - 1. \tag{22}$$

Daraus sehen wir, daß $N(w; f)$ nicht unendlich sein kann. Also haben wir

(22a) $$N(w; f) \leqq (m + 2)n - 1.$$

Im Falle $\beta = 0$ gilt auch (20). Wegen (14) ist aber für hinreichend nahe bei $-\infty$ gelegene u

$$N(u; F) = 0.$$

Die im vorigen Abschnitte für den Fall $\beta = 0$ angestellten Betrachtungen zeigen, daß dann

$$N(z; F) \leqq n$$

sein muß. Mit Rücksicht auf (20) folgt daraus

(23) $$\overline{N}(w; f) \leqq 2n,$$

also

(23a) $$N(w; f) \leqq 2n.$$

(22a) und (23a) enthalten den *Satz:*

IX. *Ist* $\alpha + i\beta = \varrho$ *eine Wurzel der Gleichung mit reellen Koeffizienten*

$$c_0 + c_1\varrho + \cdots + c_n\varrho^n = e^{-\varrho}, \qquad n \geqq 1,\ c_n \neq 0$$

und sind die Wurzeln von

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = 0$$

sämtlich reell, so hat jede Lösung $f(x)$ *der Funktionalgleichung*

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x - 1),$$

für die

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) e^{-\alpha x} = 0$$

ist, in jedem Intervall $w - 1 \leqq x \leqq w$ *nicht mehr als* $(m + 2)n - 1$ *Nullstellen, wo die ganze Zahl* m *so bestimmt ist, daß*

$$\frac{m\pi}{\beta} > 1, \quad \frac{(m-1)\pi}{\beta} \leqq 1$$

ist.

Ist $\beta = 0$, *so hat* $f(x)$ *in jedem Intervall* $w - 1 \leqq x \leqq w$ *nicht mehr als* $2n$ *Nullstellen.*[1])

1) Vgl. die zit. Arbeit „Über die Funktionaldiff.-Gleichung usw." S. 204, Satz VIIIb.

Druckfertig erklärt am 10. I. 1915.]